

Title	自己重力流体の力学平衡系列(ナビエ・ストークスの方程式の解)
Author(s)	蜂巢, 泉
Citation	数理解析研究所講究録 (1984), 510: 268-294
Issue Date	1984-01
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/98301">http://hdl.handle.net/2433/98301</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 自己重力流体の力学平衡系列

京大・工 蜂巢 泉 ( Izumi Hachisu )

### 1. はじめに

ここでは、回転する自己重力流体が、どのような構造・形状を持つかという問題を扱う。特に、非圧縮性でかつ、剛体的回転をしているもののみに話を限定する。(圧縮性が入った場合や微分回転の場合についても種々の結果が得られているが、それらは別の機会に述べたい。)

この種の問題は、実に古くから多くの人々によって研究されてきた。例えば、ニュートンは自らつくり上げた力学を基にして、地球の形状を論じた。それまで、球と思われていた地球が自転の効果を入れると、極方向よりも赤道方向がより膨らんでいるはずだと結論している。これは200年後に実際の測量で確かめられた。ニュートン以後、ラプラス、マクローリン、ヤコビ、ポアンカレ、リーマン、ジーンズ等々によって精力的に研究されたが、解析的にわかっている厳密解

の数は、非常に少く（マクローリン回転楕円体とヤコビ三軸不等楕円体のたった2つの例のみ）、全体の様子を把握するには程遠い状態であった。

ここでは、数値計算を用いて、解を求めることで、解系列の全体像を明らかにしていくつもりである。

## 2. 古典的議論

18世紀になると、マクローリンが回転軸対称の仮定の下で厳密解を発見する。これは回転楕円体の形状を持つもので、以後マクローリン回転楕円体（Maclaurin spheroid）と呼ばれる。19世紀になると、ヤコビが非軸対称の解を見つける。これは、ヤコビ楕円体、又はヤコビ三軸不等楕円体（Jacobi Ellipsoid）と呼ばれる。非圧縮・剛体回転に話を限れば、現在までに発見されている厳密解はこの2つだけである。以後の研究は、この2つの解の安定性を線形理論の枠内で議論する方向に進む。この結果、次の様なことがわかって来た。

自己重力流体をひとつの原始星の簡単なモデルと考える。全体の角運動量を一定に保ちながらまわりに熱を逃がして原始星が収縮すれば、次第に回転が速くなる。この準静的に収縮していく系列は、マクローリン回転楕円体が次第に扁平になっていくのに対応している。もう少し数学的に見れば、2

つの無次元量

$$j^2 \equiv \frac{J^2}{4\pi G M^{10/3} \rho^{-1/3}} \quad (1)$$

$$\omega^2 \equiv \frac{\Omega^2}{4\pi G \rho} \quad (2)$$

を定義し、 $\omega^2$ - $j$ 面でマクローリンの系列を表わすと、図1のようになる。原始星が収縮していく場合、全体の質量 $M$ と角運動量 $J$ が保存するとして、

$$j \propto \rho^{1/6} \quad (3)$$

となるから、 $\rho$ が増加するにつれて、 $j$ も増える。図においては、左から右へ進む。原始星はしだいに速く回転する様になり、形状は、扁平になってゆく。原始星が、 $\omega^2 = 0.0936$  ( $j = 0.0675$ ) に達した時、マクローリン回転楕円体から、ヤコビ三軸不等楕円体への分岐点が存在する。粘性がある場合には、マクローリン回転楕円体は不安定になり、ヤコビ楕円体の系列に移る。今度は、ヤコビ系列に沿って、収縮を続けるが、 $\omega^2 = 0.0710$  ( $j = 0.0884$ ) に、西洋梨型 (Pear-Shaped) の解の分岐点が存在する。この解は、線形理論の枠内で、リアプーノフとポアンカレが独立に発見したものである。ポアンカレは、西洋梨型の形状の力学的安定性を調べて、安定だとした。そして、ヤコビ楕円体から、西洋梨型の形状の解への分岐がおり、西洋梨型の流体がまん中の部分でくびれをおこ

して、最終的に2つに分裂して、月と地球の様な惑星・衛星系や二重星（連星）が出来ると考えた。この説は、惑星・衛星系や二重星の生成論としては、非常に魅力的であったので、以後、多くの人々により研究される。西洋梨型の形状が力学的に不安定だと証明されたのは、それからしばらく経ってからである。（ポアンカレは、重要な項をひとつ落としていた。） リアプーノフやジーンズによってである。このことにより、生成のメカニズムは、少し変更された。ヤコビ楕円体は、西洋梨型の解への分岐点にくると、力学的に不安定になり、急に二つの流体に分裂し、二重星系をつくる。というふうに。

### 3. 現代的星生成論と平衡解との関連

最近の天体物理学の最も大きな進歩は、恒星の一生をほぼ解き明かした点にある。しかし、その誕生と死についてはまだ未解明な部分が多い。暗黒星雲から、最終的に一個の星が生まれるまでの道筋は、最近特に、精力的にやられている分野である。太陽系の様に惑星系を伴う場合と、そうでない場合、連星系をつくる場合と、そうでない場合。これらの違いが、何によって生じるのかという問題は、その中でも、最も注目されている。

現実の問題は非常に複雑で、回転だけではなく、磁場も存在している。もちろん、星を生み出すガスは非圧縮性ではなく、熱との関係もある。ガス雲は準静的に収縮するよりはむしろ、ある時点で力学的に不安定になって、収縮を開始するらしい。

以上の様な事情があって、天体物理学の分野では、3次元の力学平衡解を求めるよりも前に、3次元の Hydrodynamics の数値計算が先行した。しかし、3次元の動的な数値計算は誰がどんなコードを使って計算するかによって結果が違っているという状態がここ十年位続いている。軸対称の計算についても、同じ様な状態であって、とてもすべてを信用できるまでにはなっていない。

そこで、力学平衡解の重要性が浮かび上がってきたわけである。本来ならば、圧縮性ガスについて調べる必要があるが、実は、圧縮性と非圧縮性の差は、あまりなく、定性的にはかなり良く一致する。そこで、非圧縮性流体について十分に良く調べておけば、かなりの割合で、非圧縮性についても成り立つのである。もちろん、決定的に異なる側面も存在するが、こういった場合に解の分岐が起こるかという様な、天体物理学的に興味ある面では、ほとんど差がないということである。軸対称の場合にはオストライカーとボーデンハイマーが、ポ

リトロープガス ( $P \propto \rho^{1+1/N}$ :  $N$  をポリトロープ指数と呼ぶ。)について計算し、非圧縮性流体と比較して良い一致を見い出している。3次元の(非軸対称)形状については私達(蜂巢・江里口)が明らかにした。このことは、実は3次元の動的な計算も示唆していることなのである。ガスの収縮の途中に、一時的に準平衡状態が実現することがある。その形状が、非圧縮性流体の平衡形状と良く似ているのである。したがって、前もって力学平衡解を計算しておけば、動的に収縮してきた場合の状態が大まかに予測できるのである。

#### 4. マクローリン系列から分岐する平衡形状

マクローリン系列やヤコビ系列に対して、微小な変形を加えた場合の安定性は、1960年から約10年にわたってチャンドラセカールを中心に調べてられた。特に、チャンドラセカールは、ビリアル・テンソル法という形式を考え出して、それを用いて精力的に研究した。その結果、マクローリン系列やヤコビ系列上で、多数の中立安定点や動的に不安定になる点が見い出された。中立安定点とは、そこから新しい系列が分岐する可能性のある点である。それぞれの中立点から出発して、新しい系列を捜す試みは私達(江里口、蜂巢、杉本)

によってなされた。

チャンドラセカールの始めたビリアル・テンソル形式は、実は不安定の必要条件ではあったが充分条件ではない。ということが後になって、モニク・タッスウルによって指摘された。また、中立不安定点のすべてを調べたわけでもないのに、私達（蜂巢、江里口）はマクローリン回転楕円体の固有関数系とも言うべき、偏平楕円体関数を用いて、すべての中立安定点を求めた。これは、次の様な偏平楕円体座標

$$\begin{aligned} x &= a_0 [(1+\xi^2)(1-\eta^2)]^{1/2} \cos \phi, \\ y &= a_0 [(1+\xi^2)(1-\eta^2)]^{1/2} \sin \phi, \\ z &= a_0 \xi \eta \end{aligned} \quad (4)$$

を用いる。このとき、マクローリン回転楕円体の表面は  $\xi$  座標一定の面と一致する。つまり、

$$\xi_{\text{surface}}(\eta, \phi) = \xi_0 \quad (5)$$

と表わせる。この楕円体の表面に、 $P_{2n+m}^m(\eta) \cos m\phi$  の形をした微小変形を加えた時、一次の微小量の範囲で、これが力学平衡の条件を満たす場合には、中立安定点となる。この条件は、

$$\xi_0^2 q_0^0(\xi_0) - \xi_0 + \frac{(2n)!}{(2n+2m)!} (-1)^m P_{2n+m}^m(\xi_0) q_{2n+m}^m(\xi_0) = 0 \quad (6)$$

である。ここで、 $P_n^m(\xi_0)$  は第 1 種の、 $q_n^m(\xi_0)$  は第 2 種の偏平



楕円体関数である。この中立安定点の数は無限個存在している。

チャンドラセカル達が求めたのは、 $n$ の数が4以下の場合に相当していたし、バーディンが求めたものは、 $m=0$ の場合（軸対称）にあたっている。 $n$ の小さい方のいくつかを表1にあげた。ここで、 $e$ は子午面の離心率である。

表1 マクローリン系列上の中立安定点

$e$	$\xi_0$	$\omega^2$	モード	備考
0.8127	0.7170	0.0936	$P_2^2(\eta) \cos 2\phi$	ヤコビ系列
0.8993	0.4864	0.1100	$P_3^3(\eta) \cos 3\phi$	三角オニギリ
0.9328	0.3865	0.1123	$P_4^4(\eta) \cos 4\phi$	四角ザブトン
0.9694	0.2534	0.1035	$P_3^1(\eta) \cos \phi$	アンモナイト
0.9810	0.1979	0.0933	$P_4^2(\eta) \cos 2\phi$	?
0.9853	0.1738	0.0871	$P_4^0(\eta)$	1本リング
0.9934	0.1123	0.0658	$P_6^0(\eta)$	2本リング

この表から見ると、最初のものはヤコビ系列の分岐点である。から、6個の新しい系列が存在するらしい。実際には、5個の系列が求められた。計算の方法の詳細な内容は省略するが、大まかには次の様にして行った。まず、求められた中立安定

点から、そのモードに対応する変形を適当に与えて出発する。普通は、角速度( $\omega^2$ )を与えて、それに対応する形状を求めるというやり方が行われるが、それではうまく求まらないので、ここでは、赤道面上の最大半径と、回転軸上の半径の比とをパラメータとして与えて、それに対応した角速度や平衡形状を求めた。このパラメータを少しずつ変えていくことで、次々と解が求まり、それらがひとつの平衡解系列を形づくる。得られた系列は以下の様なものである。

#### (a) 三角オニギリ型平衡形状 (Triangle)

マクローリン系列上で、 $\xi_0 = 0.4864$  から分岐する系列は、不安定モード  $\cos 3\phi$  に対応して、3個のでっぱりが次第に発達していく形をとる。マクローリン系列との関係は、図1に示してある。より少ない角速度で全体を支えているのは、回転楕円体からずれて、でっぱりが大きくなる為に、重力が少し小さくなることによる。しかし、角運動量は、でっぱりの効果が効いて、大きくなる。図1の白抜きのところで、三つのでっぱりから質量放出を起こすので、力学平衡解としての系列はここで終る。その直前の形を図2に示した。

#### (b) 四角ザブトン型平衡形状 (Square)

$\xi_0 = 0.3865$  から始まる系列である。この系列も  $\cos 4\phi$  に対応して、四つのでっぱりが発達してくる。そして、オニギリ型と同じく、図1の白抜きの点のところで、質量放出を起こす様になって終る。その直前の形を図2に示してある。

(C) アンモナイト型平衡形状 (Ammonite)

$\xi_0 = 0.2534$  から始まる系列である。チャンドラセカルは、ヤコビ系列から分岐する西洋梨型に対比させて、マクロールンから分岐する西洋梨型平衡形状と呼んだが、図2を見ればわかる様に西洋梨とはかけ離れている。この系列もやはり赤道面上の薄くな。たでっぱりから質量放出を起こして系列は終る。

(d) ハンバーガー型平衡形状 (Concave Hamburger)

$\xi_0 = 0.1738$  から出発する系列である。図2に示した様に、回転軸の付近の中央部がへこんでくる。このへこみは次第に大きくなり、遂には、ドーナツの形状を持つ様になる。後で出てくる二本リングの形状との比較から一本リングの系列とも呼ぶことにする。このリングは図3に示した様に  $j^2$  が大きくなるにつれて、回転軸から離れ、その切り口は円に近づく。昔流行したフラフープ型となる。実は、切り口が円の場合

合には、重力ポテンシャルが円環関数で表わされるので、解析的に平衡解の存在する条件を求めることができる。ただし、切り口が円に近いとは言っても厳密には円からずれているので、マクローリン回転楕円体やヤコビ楕円体と違って、一種の近似解である。これは、ダイソンによって 19 世紀末にやられたので、一本リングの  $j^2$  が大きい極限をダイソンリングと呼ぶ。1974 年にウォンは、ダイソンリングの  $j^2$  が小さい方の形状を数値計算によって求めた。彼は、全角運動量 ( $j$ ) を与えて系列を求めたので、 $j^2$  が極小となるところまでしか計算できなかった。したがって、マクローリン系列との関係は不明のままだったのである。私達の求めた系列は、ドーナツ形状になった領域では、ダイソン-ウォンのリングにぴったりと一致している。この平衡形状は  $j^2$  が無限大になるまで続く。

この形状は、ガス雲の動的収縮の途中でよく現われる形状のひとつでもある。もちろん、初期条件として、どのような角運動量分布を与えるかにもよるが、収縮の途中でパンケーキ状になり、次にドーナツ状になる。このドーナツ状の構造は、実は動的に不安定なので、いくつかにぶちぎれて、そのひとつひとつが星となるのである。この様な場合には、二重星系や多重星系が生まれやすいので、太陽系の様に惑星

系を持つ星はできにくい。

(e) 二本リング型平衡形状

$\xi_0 = 0.1123$  から出発する系列である。一本リングと二本リングの中立安定点はバーディンによって計算された。子午面での切り口を図3に示した。二つの山が発達し、分裂して二本リングになることがわかる。この場合の二本のリングの質量比は0.90で内側のものの方が小さい。

(f) マクローリン系列から分岐する系列（一般論）

こうして調べてみると、ほとんどすべての中立安定点から新しい系列が分岐していることがわかる。ただし、 $\xi_0 = 0.1979$  から出てくる解  $[P_4^2(\eta) \cos 2\phi]$  の変形に対応するものについて、今のところ求まっていない。これは、分岐する系列が存在しないというよりは、解系列が非常に短いか、又は解を特定するパラメータのとり方が適当でないかの理由によって、計算できていないとみた方が良さそうである。したがって、ここで求めたものよりも高次の変形に対する中立安定点からも、同様に新しい系列が分岐していると考えて良いと思う。

ただし、 $P_n^m(\eta) \cos m\phi$  型の大部分のものは、途中で質量放出を起こして、解系列がそこで終ると考えられる。質量放出を

起こさずに、 $j^2$ が無限大になるまで続く系列としては、 $P_{2n}^0(n)$ のモードに対応する系列であり、これはおそらく  $(n-1)$  本のリング構造に至ると予想できる。図1より予想される様に、1本リング、2本リング、等と続き、極限ではマクローリン系列に集束する。つまり、1本リングとマクローリン系列とは含まれた領域にこれらの  $n$  本リングの系列は存在すると思われる。

#### 5. ヤコビ系列から分岐する系列

チャンドラセカールが求めたヤコビ系列上の中立安定点は表2の2通りである。マクローリン系列の場合と少し事情は異なり、ヤコビ三軸不等楕円体の中立安定点を求める解析はかなりめんどうとなる。チャンドラセカールはビリアル・テンソル形式を用いて中立安定点の解析を行ったけれど、マクローリン系列に対するのと同様に、三軸不等楕円体の固有関数として、ラメ (Lamé) 関数が存在する。これを用いれば、おそらくマクローリン系列の場合と同じ様にして無限個の中立安定点が求まると思う。しかし、これはまだやられていない。

表2 ヤコビ系列上の中立安定点

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\omega^2$	モード	備考
1	0.432	0.345	0.0710	$P_3^1(\cos\theta)\cos\phi$ $+$ $P_1^1(\cos\theta)\cos\phi$	西洋梨型
1	0.297	0.258	0.0532	$P_4^2(\cos\theta)\cos 2\phi$ $+$ $P_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi$	ダンベル (鉄啞鈴型)

$a_1, a_2, a_3$  は楕円体の3軸の長さを表わす。

求められた点から始まる系列をみると、

(a) 西洋梨型平衡形状 ( Pear-Shaped )

$\omega^2 = 0.0710$  から分岐するのが、2章で述べたポアンカレの西洋梨型系列である。その中で最も注目される事柄は、西洋梨のくびれが大きくなり、ついには分裂して二重星をつくるということであった。ところが、今回この系列を計算してみると、マクローリン系列から分岐する系列の多くが質量放出を起こしてその系列を終了したのと同じ様に、西洋梨型も赤道面上のでっぱった部分から質量放出を起こしてしまうことが示された。この直前の形は図2にある様に、西洋梨という名前に値する程も変形していない。

このことは、分岐点で動的に不安定になったとしても、その質量の一部をでっぱりの部分から放出してしまう可能性を示している。二重星系になるというのは、どうも困難な筋書となってしまう様である。

(b) ダンベル (鉄啞鈴) 型平衡形状

$\omega^2 = 0.0532$  から分岐する系列は、「西洋梨」の場合とちがって、十分に大きな変形をとげ、最終的には分裂に至ることが示された。この系列とヤコビ系列の関係は図1に、変形の様子は図2に示してある。この場合の分裂は質量比が1:1の等分割となる。分裂した後は、二つの流体は次第に遠ざかっていく。二重星系の誕生である。これは「西洋梨」の系列とは異なり、 $j$  が無限大の領域まで続く。

(c) ヤコビ系列から分岐する他の系列 (一般論)

マクローリン系列から分岐する場合と同様に、ヤコビから分岐する高次の変形に対しての平衡形状についても予想がつく。一般に  $P_{2n+m}^m(\cos\theta)\cos m\phi$  型のモードに対しては、「西洋梨」型の様にでっぱった部分から質量放出を起こして系列が終了するが、特に  $P_{2n+2}^2(\cos\theta)\cos 2\phi$  型のモードに対しては、ダンベル形状の様に  $j$  が無限大まで系列は続くと思われる。この



場合、 $n$ 個の星は、一本の串にささった団子の様に、一直線上に並ぶ。

## 6. 二重星系

これまでみてきた系列はすべてマクローリン、又はヤコビ系列から分岐するものであった。しかし、その大部分は、剛体回転という仮定の下ではそのほとんどが質量放出を起こしてしまう。系列としては短いものである。これだけであれば、力学平衡解の全体像はそれ程豊富とは言えない。そこで、直接はマクローリンやヤコビ系列につながらないが、有用と思われる系列を求めてみた。その最初のものとして質量比の異なる二重星系をみってみる。

マクローリンやヤコビ系列、及び質量比1:1の二重星の系列との関係は図1に示した。二つの星が近づくにつれて、 $\omega^2$ は増加していく。そしてある点で極大に達する。注目すべきことは、この時の $\omega^2$ の値が質量比にほとんど依らず  $\omega_{\max}^2 \approx 0.02$  である。実はこのことと、二つの自己重力流体が互いにどこまで近よれるかということとは密接な関係がある。二つの流体は変形しているので、その軌道運動はケプラーの法則からはずれている。しかし、そのずれの程度は今考えてい

る二重星系の場合に限れば、それ程大きくない。(大きくても数パーセント。)したがって、角速度の大きさの二乗と軌道の半径の三乗は逆比例するから、 $\omega^2$  に極大が存在するという事は、二つの星の間には近よれる最小距離が存在するということになる。これは、先程にもふれた様に質量比にはほとんど依らず、

$$L_{\min} = 2.5 \left( \frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{1/3} \quad (7)$$

である。ここで  $L$  は二つの星の各々の重心間の距離(separation)である。これはこの概念を初めて提出した人の名にちなんでロッシュの限界と呼ばれている。

このロッシュの限界内に星が近づいた場合には、自転と公転の周期が同じという条件はもはや維持できない。したがって、剛体的回転という枠内では解は存在しないということになる。このときは公転と同じ周期でまわる回転系にのってみれば、内部運動が生じている。これよりさらに近づけば、遂には潮汐力によってバラバラにされてしまう。この距離はロッシュ限界とは概念的に区別されるべきもので、潮汐限界(tidal limit)と名付けたい。

ロッシュ限界内には流体は入れないので、そこで系列は終ると考えられるが、実はそうではない。私達は解を求める場

合のパラメータとして、質量の小さい方の星の赤道面上の最大半径と極軸上の半径の比（楕円体で言えば、最長軸と最短軸の比）をとった。このパラメータを大きくするに従って星は長細くなる。このとき、二つの星は最初近づき、そしてロッシュ限界にまで近づいた後に、また遠ざかっていく。しかし、その後程なくして、質量放出を起こして解は終了する。この質量放出は、小さい方の星が潮汐力でつぶされることと同義である。その直前の形を図2に示した。点線は各々の星の自己重力圏である。これより先、さらに細長くなれば、軽い方の星は重い方の星の自己重力圏に突入してしまうので、質量が相手の星に移ってしまう。この質量移動は不安定な現象なので、つぎつぎと、すべての質量が相手の重力圏に抱えられてしまう。いわゆる潮汐破壊といわれる現象である。

このことと、先程述べた潮汐限界とは、少し話の内容が違っていると思われる方もいるかもしれない。潮汐限界とはこれ以上内側にはいると潮汐破壊をうけてしまう最小距離のこととして定義した。しかし、これは、自己重力流体の平衡解が多重解であるということをあまり意識していない定義の仕方であった。つまり、形状や、内部にどのような運動が存在するかによって、先程述べた自己重力圏の形が変化する。したがって、潮汐限界の実際の値もいろいろと変化する。平衡解

を求めて初めてその限界も求まるのである。もちろん、内部運動を考えた場合には別の解系列が求まり、それに対応した潮汐限界も求まる。この様にして求めた種々の限界の中で最も小さいものをとれば、これより内側ではいかなる流体も力学的に安定には存在できないという最初の定義と同じものになる。

## 7. 多重星系

二重星系の他にも、平衡形状としてその存在を許される多重星系が種々ある。ここでは、3体、4体、5体、6体の多重星系について計算した。マクローリンや二重星との関係は図1に示してある。3章で述べた様に、動的な数値計算の途中で、ドーナツ形状の準平衡状態が出現することがある。これはその後でいくつかにちぎれて、多重星系をなすのであるが、この多重星系と一本リングの系列との関係を、力学平衡解の系列としてみなおせば、また一層理解が深まると思われる。

3体の場合には、図2にその形に示してある。この様に3つの流体の各々は、同じ形状を持っていると仮定している。遠方から近づいてくるにつれて、各々の星は図の様に全体の

重力中心の方へ（つまりは回転軸の方へ）のびてくる。最終的には、回転軸上で三つの流体はくっつき合う。耳を三つ合わせた様な形をしているので、スリー・ローブ (3-lobe) と呼ぶ。したがって、この場合はこれ以上近づけても、一本リング的にはならないだろう。

4体以上の場合は事情が違ってくる。各々の流体を近づけていくに従って、3体の様に回転軸の方に向ってのびていくのではなく、隣の流体に向って両方にのびていく。そして、隣同士がくっつき合う様になる。これは、一本リングへつながることを予想させる。今のところ、くっつき合う直前までしか計算できないので、本当に一本リングへ行くのかどうかについては、不確定であるが、一本リング系列上の中立安定点の解析も、このことが本当であるらしいことを支持している。中立安定点を調べてみると  $\cos m\phi$  の変形に対応したもののうち、 $m=4, 5, \dots$  の場合についてのみ存在して、 $m=3$  については存在しない。したがって、3体の場合は、三角オニギリの系列へ関係しているのかもしれない。

## 8. 準静的収縮の場合に実現される系列

これでだいたいの系列が出そろったので、もう一度、2章

の問題をとり上げてみたい。準静的ということにして、動的な安定性は今は考えないことにする。まず、原始星が収縮するにつれてマクローリン系列からヤコビ系列に沿って変化していくことは前に見た。西洋梨型系列の分岐点のところまで達しても、西洋梨型系列の方へは行かない。なぜなら、そちらに行ったらとすれば  $j$  が減少してしまうからである。(収縮の過程では  $j$  は常に増加する。)

したがって、さらに収縮を続ければ、ヤコビ系列からダンベル系列へと移る。ところがダンベル系列上では  $j$  が極大になる転向点が存在して、これ以上  $j$  が大きくなろうとすれば、一種の相転移を起こさねばならなくなる。その時には、図1で  $j$  が同じで  $\omega^2$  がずっと小さい二重星の系列に転移する。ダンベルのまん中の部分がくびれて、二重星になる相転移である。これが準静的な意味でのフィッション (fission) である。

## 9. 相転移との関連について

実は、マクローリンからヤコビへの分岐は二次相転移とみなすことができる。前章で述べた分裂 (フィッション) は一次相転移である。三次相転移はないのであろうか。実はある。マクローリンからハンバーガー系列への分岐と、ヤコビから

ダンベルへの分岐がそれに相当している。 $j/\omega$  は慣性能率で、熱力学との比較からは比熱（又は熱容量）に対応している。例えばマクローリン・ヤコビ分岐ではその系列に沿っての微分が不連続である。ヤコビ・ダンベル分岐では一階微分は連続だが、二階微分は不連続となっている。

## 10. 終りに

自己重力流体の力学平衡形状とその解系列をいくつか計算し、その間の関係を簡単に論じた。主に天体物理学的な側面に重点を置いて述べて来たが、数学的にみても面白い素材を提供しているのではないだろうか。

## 参考文献

- ① 古典的な話が出ているのは

萩原雄祐 「回転流体の平衡形状論の回顧」

岩波数学講座、1933年。

- ② 1960年代までのまとめは

Chandrasekhar, S., "Ellipsoidal Figures of Equilibrium"

(Yale 大学出版, New Heaven) 1969年。

③ ここで述べてきたことは、

(A) Dumb-Bell: Pear-Shaped;

Eriguchi, Y., Hachisu, I. and Sugimoto, D.: 1982,  
Prog. Theor. Phys. 67, 1068.

Hachisu, I. and Eriguchi, Y.: 1982,  
Prog. Theor. Phys. 68, 206.

(B) Binary;

Hachisu, I. and Eriguchi, Y.: 1983a,  
submitted to Publ. Astron. Soc. Japan  
(Compressible case).

Hachisu, I. and Eriguchi, Y.: 1983b,  
submitted to Publ. Astron. Soc. Japan  
(Incompressible case).

Hachisu, I. and Eriguchi, Y.: 1983c,  
submitted to Publ. Astron. Soc. Japan  
(Incompressible case, Planet and satellite system).

(C) Triangle: Square: Ammonite: Two-Ring;

Eriguchi, Y. and Hachisu, I.: 1982,  
Prog. Theor. Phys. 67, 844.

Eriguchi, Y. and Hachisu, I.: 1983,  
Prog. Theor. Phys. 69, 1131.

(D) Concave Hamburger: One-Ring;

Eriguchi, Y. and Sugimoto, D.: 1981,  
Prog. Theor. Phys. 65, 1870 (Incompressible case).

Hachisu, I. and Eriguchi, Y.: 1982,  
Prog. Theor. Phys. 68, 191 (Compressible case).



(E) Multi-Body;

Eriguchi, Y. and Hachisu, I.: 1983,  
submitted to Prog. Theor. Phys.

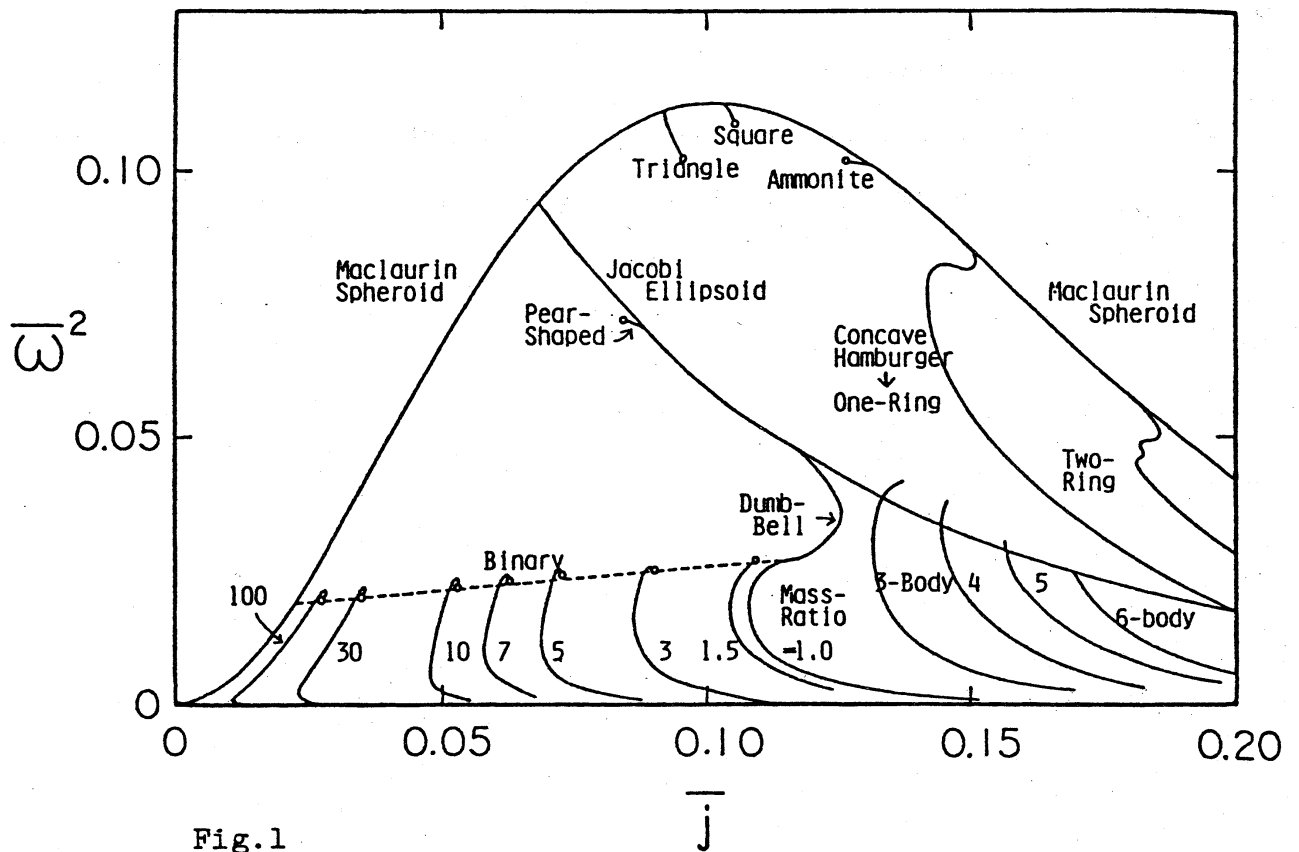
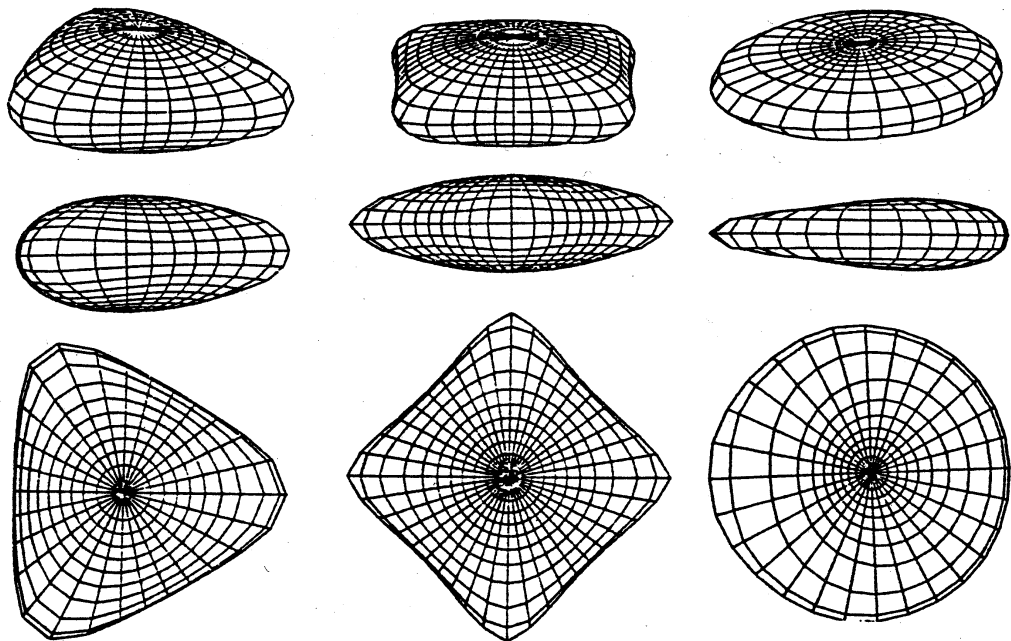


Fig.1

Angular velocity  $\bar{\omega}^2$  - angular momentum  $\bar{j}$  diagram.

Fig.2  
Triangle

Square

Ammonite

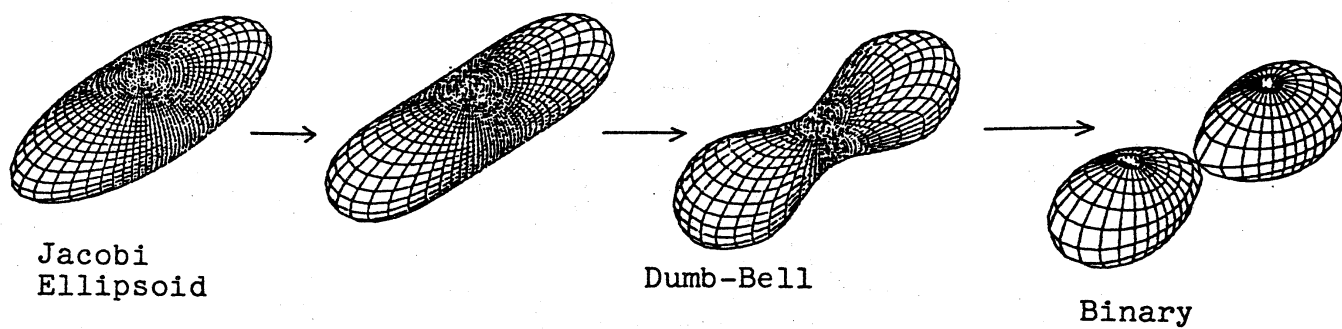


Fig.2

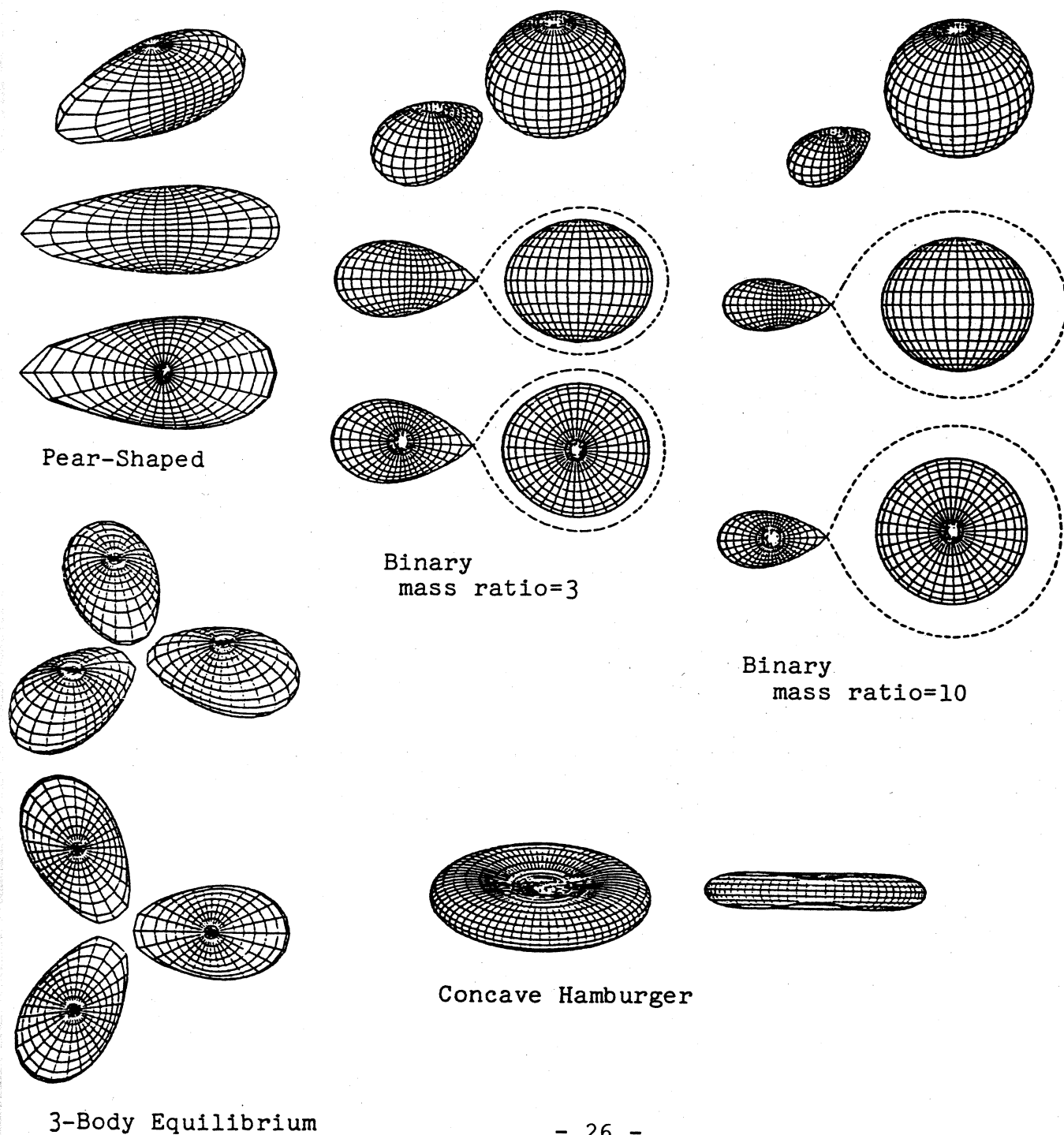
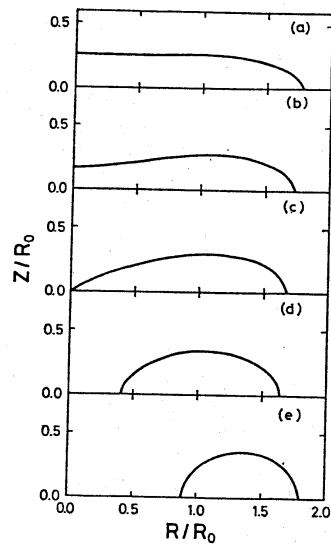
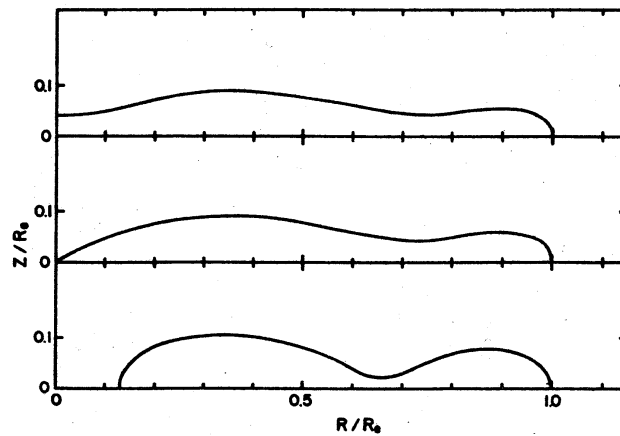


図 3



ハンバーガー形状からドーナツ形状への変化。子午面の 4 分の 1 をあらわしている。

1 本リング



The change of the meridional cross section of the two-ring sequence. The cylindrical coordinate  $(R, Z, \phi)$  is used.

2 本リング